Pares Ordenados

Álgebra a través de la Teoría de Categorías

2023-II

Daniela Colmenares
15/12/2023

LENGUAJE CATEGÓRICO

1. CATEGORÍAS

1.1. DEFINICIÓN

Una **categoría** $\mathcal{A}$ consiste de:

1. Una colección de objetos $ob(\mathcal{A})$.
2. Para cada $A, B \in ob(\mathcal{A})$, una colección de morfismos $\mathcal{A}(A, B)$.
   El conjunto de morfismos entre los objetos A y B también se denota como $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$.
3. Una operación llamada *composición* tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(B, C) \times \mathcal{A}(A, B) &\to \mathcal{A}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

   Esta operación debe satisfacer que:

$\rightarrow$) Existe una unidad $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$ tal que para todo $f \in \mathcal{A}(A, B)$:

$$f \circ 1_A = 1_B \circ f = f.$$

$\rightarrow$) Es asociativa, es decir, para todo $f \in \mathcal{A}(A, B)$, $g \in \mathcal{A}(B, C)$ y $h \in \mathcal{A}(C, D)$:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Cada morfismo tiene un dominio y codominio determinado, es decir, es necesario que:

$$\mathcal{A}(A, B) \cap \mathcal{A}(A', B') = \emptyset$$

si $A \neq A'$ o $B \neq B'$.

Un morfismo $f \in \mathcal{A}(A, B)$ es un **isomorfismo** si existe un morfimso $g \in \mathcal{A}(B, A)$ tal que:

$$g \circ f = 1_A \quad \text{y} \quad f \circ g = 1_B.$$

Si existe un isomorfismo entre los objetos A y B, decimos que A y B son isomorfos. Esto se nota como $A \cong B$.

1.2. EJEMPLOS

1.2.1. Categorías Finitas

Los objetos de una categoría no tienen por qué ser conjuntos infinitos. Por ejemplo, considere $\mathcal{A}$ una categoría cuyos objetos son dos elementos: $ob(\mathcal{A}) = \{x, y\}$ y hay único morfismo entre objetos diferentes: $\mathcal{A}(x, y) = \{f\}$. Ciertamente, para cada objeto debe existir el morfismos identidad.

1.2.2. Categorías Discretas

Se denominan categorías discretas aquellas cuyos únicos morfismos son las identidades de cada objeto. Esto es, $\mathcal{C}$ es una categoría con $ob(\mathcal{C}) = S$ y S un conjunto. Los morfismos están dados por:

$$Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) = \begin{cases} \{id\} & : x = y \\ \emptyset & : x \neq y \end{cases}$$

1.2.3. Categorías Algebraicas

Las categorías pueden ser también objetos matemáticos conocidos con funciones que respeten la estructura del objeto. Por ejemplo, la categoría de grupos, denotada por Grp, tiene por objetos todos los grupos y sus morfismos son los homomorfismos de grupos. Asimismo, se define la categoría de anillos, denotada por $Ring$, y la categoría de módulos a derecha sobre un anillo R, denotada por Mod_R.

1.2.4. Grupo de categoría

Es importante tener en cuenta que los morfimos de una categoría no tienen por qué ser funciones, aunque usualmente lo sean. Para ilustrar esto, tomemos como base un grupo $(G, *)$. La categoría $\mathcal{B}$ tendrá por objeto un único elemento:

$$ob(\mathcal{B}) = \{\bullet\},$$

no se nombre porque su etiqueta es indeferente.

Por otro lado, los morfismos de este objeto en este objeto están dados por:

$$\mathcal{B}(\bullet, \bullet) = G.$$

La operación $*$ del grupo cumple el rol de la composición de la categoría pues es asociativa y además, el elemento neutro del grupo tiene el rol de identidad $id_\bullet = e \in G$. Más aún, el hecho de que cada elemento tenga inverso nos permite afirmas que todos los morfismos de esta categoría son isomorfismos.

1.3. FORMAS DE CONSTRUIR CATEGORÍAS

1.3.1. Categoría dual

Dada una categoría $\mathcal{C}$, llamamos **categoría dual** $\mathcal{C}^{op}$ a aquella que:

$$\begin{aligned} ob(\mathcal{C}^{op}) &:= ob(\mathcal{C}) \\ Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) &:= Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \end{aligned}$$

y composición como sigue,

$$f \circ^{op} g := g \circ f.$$

1.3.2. Categoría producto

Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, entonces la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es la categoría cuyos objetos son las parejas (X, Y) donde $X \in ob(\mathcal{C})$ y $Y \in ob(\mathcal{D})$. Sus morfismos son las parejas dadas por:

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) := Hom_{\mathcal{C}}(X, X') \times Hom_{\mathcal{D}}(Y, Y')$$

y su composición es componente a componente.

2. FUNTORES

2.1. DEFINICIÓN

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ consiste de:

1. Una función que envía $ob(\mathcal{A})$ en $ob(\mathcal{B})$:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ A &\mapsto F(A). \end{aligned}$$

2. Una función que envía morfismos de $\mathcal{A}$ en morfismos de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A}(A, A') &\to \mathcal{B}(F(A), F(A')) \\ f &\mapsto F(f). \end{aligned}$$

Esta asignación en morfismos debe cuidar de:

a. Respetar composiciones:

$$F(f \circ f') = F(f) \circ F(f').$$

b. Enviar identidades en identidades:

$$F(1_A) = 1_{F(A)} \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Con esto podemos construir la categoría CAT[1] cuyos objetos son categorías y los morfismos son los funtores, es decir, debe existir un funtor identidad para cada categoría y los funtores deben poder componerse.

2.2. EJEMPLOS

2.2.1. Funtor Identidad

Dada una categoría $\mathcal{C}$, existe un funtor que envía a cada objeto y morfismo en él mismo:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{id_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "id_{\mathcal{C}}(f)=f"] \\ X' \arrow[r, mapsto] & X' \end{tikzcd}$$

[1] De forma estricta, sólo deben considerarse las categorías cuyos objetos son categorías pequeñas (categorías cuya colección de objetos forma un conjunto) para asegurar que los funtores entre estas formen un conjunto.

2.2.2. Funtor Olvidadizo

Los funtores olvidadizos F son funtores que envían objetos con estructura a objetos que tienen parte de ella. Por ejemplo:

$$Mod_R \xrightarrow{F} Grp$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & F(M) = M \arrow[d, "F(f)=f"] \\ M' \arrow[r, mapsto] & F(M') = M' \end{tikzcd}$$

A cada M un $R-$módulo a derecha lo envía a M visto como grupo. Asimismo, a cada homomorfismo de $R-$módulos f entre dos módulos M y M', lo envía la misma función f pero vista como homomorfismo de los grupos M y M'.

2.2.3. Funtor $Hom(M, -)$

Sea R un anillo y M un R-módulo, el funtor $F = Hom_R(M, -)$ asigna a cada A un R-módulo a derecha el grupo abeliano compuesto por los homomorfismos de M el R-módulo fijo en en A. La operación es

$$Mod_R \xrightarrow{F=Hom_R(M,-)} Ab$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & Hom_R(M, A) \arrow[d, "F(f)"] \\ B \arrow[r, mapsto] & Hom_R(M, B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "f \circ g"'] \arrow[d, "g"] \\ B & A \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Veamos que F es un funtor:

1. Envía identidad en identidad:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "id_A"'] & Hom_R(M, A) \arrow[d, "F(id_A)"] \\ A \arrow[r, mapsto] & Hom_R(M, A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "g"] \\ A & A \arrow[l, "id_A"] \end{tikzcd}$$

   Para todo $g \in Hom_R(M, A)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} F(if_A)(g) &= id_A \circ g \\ &= g \end{aligned}$$

   luego, $F(id_A) = id_{F(A)}$.

2. Respeta composición:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & Hom_R(M, A) \arrow[d, "F(f)"] \\ B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "h"'] & Hom_R(M, B) \arrow[d, "F(h)"] \\ C \arrow[r, mapsto] & Hom_R(M, C) \end{tikzcd}$$

Veamos que $F(h \circ f) = F(h) \circ F(f)$:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "(h\circ f)\circ g"'] \\
C & A \arrow[l, "(h\circ f)"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[d, "g"'] \arrow[dl, dashed, "f\circ g"'] \arrow[dll, dashed, "h\circ(f\circ g)"'] \\
C & B \arrow[l, "h"] & A \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

Así, en virtud de la asociatividad repecto a la composición de funciones: $(h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$.

2.2.4. Módulos Libres

Sea R un anillo. Para todo conjunto I podemos definir el módulo libre $R^{(I)}$ dado por:

$$R^{(I)} := \{(x_i)_{i\in I} : x_i = 0 \text{ para todo } i \in I \text{ excepto finitos de ellos}\}.$$

La base de $R^{(I)}$ está dada por el conjunto de elementos $e_i \in R^{(I)}$ definidos como aquel que tiene 1 en la i-ésima posición y 0 en el resto.

El funtor Fr que va de la categoría de conjuntos Set a la categoría de R-módulos Mod_R está dado por:

$$Set \xrightarrow{Fr} Mod_R$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & R^{(I)} \arrow[d, "Fr(f)"] \\
J \arrow[r, mapsto] & R^{(J)}
\end{tikzcd}$$

Dado $f : IJ$ una función entre dos conjuntos, el funtor Fr le asigna el homomorfismo de módulos dado por:

$$\begin{aligned}
Fr(f) : R^{(I)} &\to R^{(J)} \\
e_i &\mapsto e_{f(i)},
\end{aligned}$$

ciertamente el homomorfismo queda determinado con el comportamiento de los elementos de la base del módulo libre.

2.3. FUNTORES CONTRAVARIANTES

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un funtor **contravariante** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ consiste de:

1. Una función que envía $ob(\mathcal{A})$ en $ob(\mathcal{B})$:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ A &\mapsto F(A). \end{aligned}$$

2. Una función que envía morfismos de $\mathcal{A}$ en morfismos de $\mathcal{B}$ tal que:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A}(A, A') &\to \mathcal{B}(F(A'), F(A)) \\ f &\mapsto F(f). \end{aligned}$$

Esta asignación en morfismos debe cuidar de:

a. Respetar composiciones en sentido contario:

$$F(f \circ f') = F(f') \circ F(f).$$

b. Enviar identidades en identidades:

$$F(1_A) = 1_{F(A)} \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

En otras palabras, un funtor contravariante es un funtor usual, o covariante, que sale de la **categoría opuesta**.

2.4. EJEMPLOS

2.4.1. Funtor $Hom(-, M)$

El funtor $F = Hom_R(-, M)$, quien fija ahora a un R-módulo M en la segunda entrada, es contravariante:

$$Mod_R \xrightarrow{F = Hom_R(-,M)} Ab$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & Hom_R(M, A) \\
B \arrow[r, mapsto] & Hom_R(M, B) \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M \\
B \arrow[ur, "g"] & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, dashed, "g \circ f"']
\end{tikzcd}$$

2.4.2. Espacios vectoriales y su espacio dual

Como caso particular del ejemplo anterior, tomemos el funtor contravariante $F = (-)^K$ que va de la categoría Vec_K de espacios vectoriales sobre el cuerpo K:

$$Vec_K^{op} \xrightarrow{F=(-)^K} Vec_K$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & V^K := Hom_K(V,K) \\
W \arrow[r, mapsto] & W^K := Hom_K(W,K) \arrow[u, "F(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

El funtor $F = (-)^K$ envía a cada espacio vectorial V en su espacio dual, es decir, al espacio vectorial conformado por los funcionales lineales desde el espacio V. La asignación de morfismos es análoga al ejemplo anterior.

LENGUAJE CATEGÓRICO

3. TRANSFORMACIONES NATURALES

3.1. DEFINICIÓN

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores entre las dos categorías. Una **transformación natural** η de F a G consiste de:

- Para cada objeto X en $\mathcal{C}$ un morfismo $\eta_x : F(X) \to G(X)$ en $\mathcal{D}$ que satisface que:

$\to$) Para todo morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$, entonces el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{D}$ conmuta.

A este lo llamamos *axioma de naturalidad*.

En otras palabras, una transformación natural, como objeto matemático, es una familia $(F(X) \to G(X))_{X \in \mathcal{C}}$ de morfismos en $\mathcal{D}$. A estas funciones se les llama funciones *componentes*.

Esto implica que para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ se puede construir exactamente un morfismo en $\mathcal{D}$ que va de $F(X)$ a $G(Y)$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"'] \arrow[dr, dashed] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Esta resulta justamente la diagonal del diagrama ya que, como el cuadrado conmuta, es única.

Como notación, escribimos como:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\eta"] \end{tikzcd}$$

a la transformación natural $\eta : F \to G$.

3.2. EJEMPLOS

3.2.1. Desde categorías discretas

Sea $\mathcal{A}$ una categoría discreta con F y G funtores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Dado que los únicos morfismos son las identidades, entonces cada funtor está determinado por las familias $(F(A))_{A \in \mathcal{A}}$ y

$(G(A))_{A\in\mathcal{A}}$.

Por tanto, una transformación natural $\alpha : F \to G$ es una familia:

$$(\alpha_A : F(A) \to G(A))_{A\in\mathcal{A}}.$$

El axioma de naturalidad se satisface trivialmente dado que los únicos morfismos en $\mathcal{A}$ son las identidades.

3.2.2. Determinante

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Sea $CRing$ la categoría de anillos conmutativos y Mon la categoría de monoides. Consideremos los siguientes dos funtores. Por un lado, sea $Mn : CRing \to Mon$ el funtor dado por:

$$CRing \xrightarrow{Mn} Mon$$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & Mn(R) \arrow[d, "Mn(f)"] \\
S \arrow[r, mapsto] & Mn(S)
\end{tikzcd}$$

Donde a cada anillo R le asignamos el monoide $Mn(R)$ dado por el conjunto de matrices cuadradas de tamaño n con entradas en R con la multiplicación. A cada homomorfismo de anillos $f : R \to S$ le asignamos el homomorfismo de monoides $Mn(f) : Mn(R) \to Mn(S)$ que a cada matriz $X = (a_{ij})_{i,j\in[n]}$ con $a_{ij} \in R$, la envía en la matriz $Mn(f)(X) = (f(a_{ij}))_{i,j\in[n]}$ con $f(a_{ij}) \in S$.

Por otro lado, sea U el funtor olvidadizo de $CRing$ a Mon:

$$CRing \xrightarrow{U} Mon$$

$$\begin{tikzcd}
(R,+,\cdot) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (R,\cdot) \arrow[d, "f"] \\
(S,+_*,\cdot_*) \arrow[r, mapsto] & (S,\cdot_*)
\end{tikzcd}$$

Veamos que el *determinante* es una transformación natural entre estos dos funtores:

$$\begin{tikzcd}
CRing \arrow[r, bend left, "Mn"] \arrow[r, bend right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow det"] & Mon
\end{tikzcd}$$

Pues para cada matriz X sobre el anillo conmutativo R, el $det(X)$ es un elemento R tal que:

$$det(XY) = det(X)det(Y)$$
$$det(I) = 1$$

Verifiquemos el axioma de naturalidad. Sean $A, B \in CRing$ con $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Quisieramos que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} Mn(A) \arrow[r, "Mn(f)"] \arrow[d, "det_A"'] & Mn(B) \arrow[d, "det_B"] \\ U(A) \arrow[r, "f"'] & U(B) \end{tikzcd}$$

Sea $X \in Mn(A)$:

$$\begin{aligned} (f \circ det_A)(X) &= f(det_A(X)) \\ &= det_B(Mn(f)(X)) \\ &= (det_B \circ Mn(f))(X) \end{aligned}$$

La clave de la primera a la segunda igualdad reside en que el determinante no es más que sumas y productos, por lo cual al ser f homomorfismo de anillos respeta dichas operaciones.

Este ejemplo quiere capturar que el axioma de naturalidad quiere captar la idea de que la transformación está definida de forma uniforme para todo $A \in \mathcal{A}$.

3.3. CATEGORÍA DE FUNTORES

Podemos ver que para cada funtor F que va de las categorías $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, existe una transformación natural dada por:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_F"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

donde cada función componente es la identidad $id_X(F(X) \to F(X))_{X \in \mathcal{A}}$.

De la misma forma, es posible definir una composición de transformaciones naturales dada por:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Definida como:

$$(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Con esto, es posible definir una nueva categoría:

> Para cada par de categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, existe una categoría compuesta por:
> - Objetos: Funtores de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.
> - Morfismos: Trasnformaciones naturales entre los funtores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.
>
> A esta categoría la llamamamos **categoría de funtores** de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y es denotada por $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ o $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$.

Como ejemplo de esto, llamemos $\mathit{2}$ a la categoría discreta con dos objetos: $\{0, 1\}$. Un funtor de $\mathit{2}$ a una categoría $\mathcal{B}$ es, en esencia, la escogencia de dos objetos de $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} F : \mathit{2} &\to \mathcal{B} \\ 0 &\mapsto F(0) \\ 1 &\mapsto F(1) \end{aligned}$$

Una transformación natural entre dos de funtores F y G resulta entonces una pareja de morfismos:

$$\alpha_0 : F(0) \to G(0)$$
$$\alpha_1 : F(1) \to G(1)$$

Por lo tanto, podemos concluir que la categoría de funtores resulta isomorfa a la categoría producto:

$$[\mathcal{2}, \mathcal{B}] = \mathcal{B}^{\mathcal{2}} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{B}.$$

En otras palabras, la notación escogida es compatible.

3.4. ISOMORFISMO NATURAL

Dadas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un **isomorfismo natural** entre dos funtores de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es un isomorfismo en la categoría de funtores $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$. Decimos que dos funtores F y G son **naturalmente isomorfos** si existe un isomorfismo natural de F a G.

Como los isomorfismos naturales son isomorfismos en $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, se denota $F \cong G$. Asimismo, decimos que $F(A) \cong G(A)$ **naturalmente** en $\mathcal{A}$ si F y G son naturalmente isomorfos.

Dicho de otra forma, dados dos funtores $F, G \in [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, decimos que $\alpha : F \to G$ una transformación natural es isomorfismo si existe $\beta : G \to F$ transformación natural tal que:

$$\alpha \circ \beta = 1_G \text{ y } \beta \circ \alpha = 1_F.$$

La relación entre la noción de isomorfismo natural entre funtores e isomorfismo entre objetos de una categoría está dada por el siguiente teorema.

Teorema:
Sea $\alpha : F \to G$ una transformación natural sobre funtores $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{B}$.
α es un isomorfismo natural si, y solo si, $\alpha_A : F(A) \to G(A)$ es un isomorfismo para todo $A \in \mathcal{A}$.

Con estos dos sentidos de isomorfismos entre objetos de una categoría, isomorfismo en el sentido usual e isomorfismo natural, es importante preguntarse cuando uno implica el otro. El siguiente teorema busca responder esta pregunta.

Teorema: Sean F y G dos funtores de la categoría $\mathcal{A}$ en la categoría $\mathcal{B}$.
Si $F(A) \cong G(A)$ naturalmente, entonces $F(A) \cong G(A)$ en el sentido usual para todo $A \in \mathcal{A}$.
Sin embargo, el recíproco no se tiene.

Para ver un contraejemplo que exhiba lo anterior, consideremos el siguiente ejemplo. Una *permutación* de un conjunto X es una biyección del conjunto en sí mismo. Escribimos $Sym(X)$ como el conjunto de las permutaciones de X. Un *orden total* en un conjunto X es un orden $\leq$ tal que para todo $x, y \in X$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$; luego un orden total en un conjunto finito equivale a una forma de poner todos sus elemetos en una sucesión. Escribimos $Ord(X)$ al conjunto de todos los órdenes totales de X.

Llamemos $\mathcal{B}$ a la categoría de conjuntos finitos y sus biyecciones.

Consideremos el funtor Sym dado por:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "Sym"] & Set
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & Sym(A) \arrow[d, "Sym(f)"] \\
B \arrow[r, mapsto] & Sym(B)
\end{tikzcd}$$

Si $f : A \to B$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{B}$ es una biyección. Por ende, la asignación $Sym(f)$ envía a cada $\alpha \in Sym(A)$ en $Sym(f)(\alpha) := f \circ \alpha \circ f^{-1}$.

Consideremos el funtor Ord dado por:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "Ord"] & Set
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & Ord(A) \arrow[d, "Ord(f)"] \\
B \arrow[r, mapsto] & Ord(B)
\end{tikzcd}$$

Si $f : A \to B$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{B}$ es una biyección. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el cardinal de los conjuntos es n. Por lo tanto, la asignación $Ord(f)$ envía a cada $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in Ord(A)$ en $Sym(f)(\alpha) := (f(a_1), \cdots, f(a_n))$.

Veamos, razonando por contradicción, que **no** existen transformaciones naturales λ del funtor Sym al funtor Ord.

Consideremos $f : A \to A$ una biyección que **no** es la identidad. Si el axioma de naturalidad se satisfaciera, tendríamos que:

$$\begin{tikzcd}
Sym(A) \arrow[r, mapsto, "Sym(f)"] \arrow[d, "\lambda_A"'] & Sym(A) \arrow[d, "\lambda_A"] \\
Ord(A) \arrow[r, mapsto, "Ord(f)"'] & Ord(A)
\end{tikzcd}$$

Veamos que por el camino verde y el camino azul del cuadrado anterior, llegamos a elementos diferentes.

Por el lado verde:

$$\begin{aligned}
(\lambda_A \circ Sym(f))(id_A) &= \lambda_A(f^{-1} \circ id_A \circ f) \\
&= \lambda_A(id_A) \\
&= (a_1, \cdots, a_n).
\end{aligned}$$

Por el camino azul:

$$\begin{aligned}
(Sym(f) \circ \lambda_A)(id_A) &= Sym(f)(id_A) \\
&= Sym(f)(a_1, \cdots, a_n) \\
&= (f(a_1), \cdots, f(a_n)),
\end{aligned}$$

donde podemos ver que $(a_1, \cdots, a_n) \neq (f(a_1), \cdots, f(a_n))$ pues f era una biyección diferente de la identidad.

Sin embargo, como para un conjunto de n elementos existen la misma cantidad de elementos en $Sym(X)$ y $Ord(X)$, los cuales son objetos en la categoría Set, son isomorfos en el sentido usual en esta categoría.

En conclusión, $Sym(X) \cong Ord(X)$ para todo $X \in \mathcal{B}$, pero no naturalmente.

4. EQUIVALENCIAS DE CATEGORIAS

4.1. DEFINICIÓN

Una equivalencia entre categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ consiste de una pareja de funciones junto con **isomorfismos naturales**:

$$\eta : 1_{\mathcal{A}} \to G \circ F \quad \epsilon : F \circ G \to 1_{\mathcal{B}}.$$

Si existe dicha pareja, se denota como $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Este símbolo se reserva únicamente para la equivalencia de categorías.

Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, decimos que son **equivalentes** si existe una pareja de funtores F y G:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

La noción de equivalencia de categorías le pide a los funtores ser *isomorfos* y no necesariamente iguales, pues sería demasiado fuerte, es decir:

$$\begin{aligned} G \circ F &\cong 1_{\mathcal{A}} \\ F \circ G &\cong 1_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

4.1.1. Caracterización de los funtores equivalentes

Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es **fiel** (respectivamente, **pleno**) si para cada $A, A' \in \mathcal{A}$, la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A, A') &\to \mathcal{B}(F(A), F(A')) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

es inyectiva (respectivamente, sobreyectiva).

Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es **esencialmente sobreyectivo en objetos** si para todo $B \in \mathcal{B}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $F(A) \cong B$.

El siguiente teorema es de gran importancia dado que permite identificar qué condiciones debe cumplir un funtor para generar una equivalencia entre categorías sin encontrar su pareja y sus respectivos isomorfismos naturales.

> **Teorema**: Un funtor es una equivalencia si, y solo si, es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo en objetos.

Responde a la utilidad análoga vista en el contexto de conjuntos. Para ver que una función f es biyectiva, encontrar la función inversa f^{-1} y mostrar que al componerlas resulta la identidad puede ser un proceso complejo. En su lugar, es suficiente con verificar que f es inyectiva y sobreyectiva.

Una consecuencia de este resultado es que cada vez que tenemos un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fiel y pleno, entonces $\mathcal{C}$ es equivalente a la subcategoría $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{D}$ cuyos objetos son de la forma $F(C)$ para algún $C \in \mathcal{C}$.

4.2. EJEMPLOS

4.2.1. Esqueleto de una categoría

Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathcal{B}$ una subcategoría plena que contiene al menos un elemento de cada clase de isomorfismo de $\mathcal{A}$. Entonces, el funtor inclusión $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ es fiel (como toda inclusión), es plena y además, esencialmente sobreyectiva en objetos.

En conclusión, cada una categoría $\mathcal{A}$ podemos encontrar dentro de ella una categoría equivalente al quitar los elementos superfluos. A esta la llamamos el *esqueleto* de la categoría.

4.2.2. Conjuntos finitos y ordinales

Sea $FinSet$ la categoría de conjuntos finitos y los morfismos son funciones entre ellos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escoger un conjunto $\mathbf{n}$ con n elementos. Por otro lado, sea $\mathcal{B}$ una subcategoría plena de FinSet con objetos $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots$. Entonces,

$$\mathcal{B} \cong FinSet.$$

A esta categoría se conoce como el conjunto de *ordinales*.

4.2.3. Dualidades

Las equivalencias de la forma:

$$\mathcal{A}^{op} \cong \mathcal{B}$$

se denominan una *dualidad* entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Con frecuencia aparecen cuando $\mathcal{A}$ es una categoría de álgebras y $\mathcal{B}$ es una categoría de espacios.

APÉNDICE

5. PARES ORDENADOS

5.1. ¿QUÉ ES?

Pares Ordenados es un programa de lectura dirigida (PLD) gratuito y virtual que busca conectar un estudiante de pregrado en Matemáticas con estudiante con estudiantes de posgrado, doctorado o pasantes postdoctorales para desarrollar un proyecto de lectura dirigida. Su objetivo principal es crear comunidad, fomentar la colaboración científica y cultural entre los miembros de nuestra Comunidad Matemática Latina/Hispana alrededor del mundo.

Este trabajo se dio en el marco de este programa y bajo la dirección del mentor Juan Omar Gomez durante la edición de Otoño 2023.

Es para mí importante reconocer el esfuerzo gigante del programa expuesto en sus organizadores y mentores quienes sin buscar ningún apoyo económico tras este proyecto buscan ser parte del colectivo que edifique y motive a las nuevas generaciones matemática latinas. Haber sido parte del programa como favorecida del mismo fue una oportunidad que agradezco. Lo que aprendí de las reuniones con mi mentor no se plasma en su totalidad en este documento y le agradezco profundamente por su acompañamiento.

5.2. SOBRE EL DOCUMENTO

Bajo los bosques de nuestro planeta se esconde una amplia red, llamada micelio[1], que conecta y dota de nutrientes a los árboles del mismo con una inteligencia casi propia. La motivación de estudiar *Teoría de Categorías* nace de querer entender las diferentes áreas de las matemáticas como una unidad que conecta tal micelio, de forma precisa y silenciosa, el intimidante bosque de las matemáticas.

Para entender el potencial de las categorías, se debe aprender primero su lenguaje. Por tanto, en este proyecto trabajamos las primeras definiciones que constituyen esta teoría y nos centramos en llevarlas a tantos ejemplos como el tiempo nos permitiera. Esto con el fin de aterrizar los conceptos y aprovechar la oportunidad para revisitar teoremas en diferentes áreas de la matemática, especialmente en el Álgebra.

Las reuniones mentor-aprendiz abarcaron muchas discusiones y preguntas que por extensión este documento no contiene. Sin embargo, el objetivo del mismo es servir como pequeña miscelánea de ejemplos de los primeros conceptos. Por otro lado, la referencia principal de este documento es **[1.]**

[1] Estructura de los hongos de apariencia similar a una raíz. **[6.]**

6. REFERENCIAS

[1.] Leinster, T. (2014). Basic category theory (Vol. 143). Cambridge University Press.

[2.] Berrick, A. J., Keating, M. E. (2000). Categories and modules with K-theory in view (Vol. 67). Cambridge University Press.

[3.] Anderson, F. W., Fuller, K. R. (2012). Rings and categories of modules (Vol. 13). Springer Science Business Media.

[4.] Taelman, L. (2023). Modules and Categories. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam.

[5.] Blyth, T. S. (2018). Module theory: an approach to linear algebra. University of St Andrews.

[6.] Micelio: las impresionantes redes naturales de la Tierra. Ladera Sur. Recuperado el 15 de diciembre de 2023, de `https://laderasur.com/articulo/micelio-las-impresionantes-redes-naturales-de-la-tierra/`